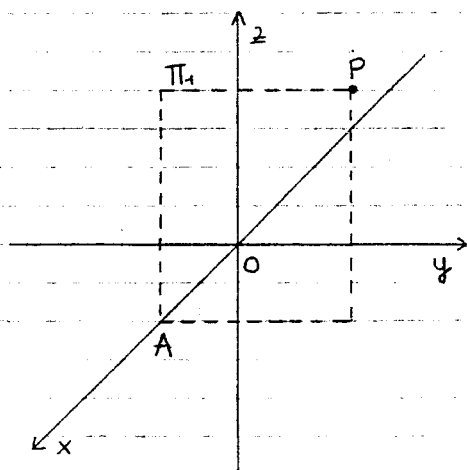


VETTORI

Coordinate cartesiane nello spazio



Consideriamo tre rette dello spazio, reciprocamente $\perp$ e passanti per un punto O , e supponiamole dotate di riferimento con la stessa unit  di misura. Le tre rette, dette assi coordinati, sono identificate nell'ordine con le lettere x, y, z ; il punto O si chiama origine. Due assi determinano un piano coordinato (xy, yz, zx).

Posto un punto P qualunque dello spazio, consideriamo le sue proiezioni sugli assi coordinati

- A = proiezione sull'asse x , individuata dal piano Π_1 parallelo al piano yz ;
- B = proiezione sull'asse y , individuata dal piano Π_2 parallelo al piano zx ;
- C = proiezione sull'asse z , individuata dal piano Π_3 parallelo al piano xy .

Dette rispettivamente a, b, c le ascisse dei punti A, B, C , fatte sulle rispettive rette, si associa a P la terna ordinata di numeri reali (a, b, c) . La corrispondenza $P \leftrightarrow (a, b, c)$   biunivoca, perci  identifichiamo P con le sue coordinate cartesiane (a, b, c) . Il sistema di riferimento cartesiano nello spazio si indica con (O, x, y, z) .

OSSERVAZIONE: Se P appartiene al piano yz , allora A coincide con O e la coordinata a   0 . $\Rightarrow$ i punti del piano yz sono quelli che hanno la 1  coordinata nulla (similmente, i punti dei piani zx e xy hanno nulle rispettivamente la 2  e la 3  coordinata). Se P appartiene all'asse x , cio  significa che esso appartiene tanto al piano xz quanto al piano xy : in questo caso sono nulle la 2  e la 3  coordinata, cio  un punto dell'asse x ha coordinate del tipo $(a, 0, 0)$. Dunque, se P ha coordinate (x, y, z) , le sue proiezioni sugli assi hanno coordinate: $A(x, 0, 0)$; $B(0, y, 0)$; $C(0, 0, z)$.

Nel sistema (O, x, y, z) la distanza tra due punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$  :

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Le coordinate di M , punto medio del segmento P_1P_2 , sono pari a:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} ; \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} ; \quad z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

- Grandezze scalari $\Rightarrow$ sono completamente individuate da un n , positivo o negativo
- Grandezze vettoriali $\Rightarrow$ sono individuate da 3 elementi: direzione, verso, intensit .

Segmento orientato e vettore

DEF: Un segmento (dello spazio) è una coppia di punti dello spazio: $AB = BA$.

Un segmento è detto segmento orientato se si preserva l'ordine con cui vanno menzionati i suoi estremi: $AB \neq BA$. Nel segmento orientato il 1° estremo si chiama origine, il 2° estremo si chiama semplicemente estremo e il verso del segmento è quello che va dall'origine all'estremo.

Siano AB e CD segmenti orientati:

- 1) Diciamo che AB e CD hanno la stessa direzione se giacciono su rette parallele.
- 2) Se AB e CD hanno la stessa direzione, diciamo che hanno lo stesso verso (rispettivamente verso opposto), se, trasladando AB sulla retta che contiene CD in modo da sovrapporre A con C , B e D si trovano sulla stessa semiretta individuata da A e C (rispettivamente su semirette opposte).
- 3) AB e CD hanno lo stesso modulo o ampiezza se la distanza di A da B è uguale alla distanza di C da D .

DEF: Due segmenti orientati AB e CD si dicono equivalenti se hanno uguali:

- la direzione (cioè sono paralleli);
- il verso (cioè sono concordi);
- il modulo (cioè sono congruenti).

OSSERVAZIONE: L'equivalenza tra segmenti orientati gode delle seguenti proprietà:

- RIFLESSIVA: ogni segmento orientato è equivalente a se stesso;
- SIMMETRICA: se AB è equivalente a CD , allora CD è equivalente ad AB ;
- TRANSITIVA: se AB è equivalente a CD e CD è equivalente a EF , allora AB è equivalente a EF .

DEF: Un vettore di $\mathbb{R}^3$ è una classe di equivalenza di segmenti orientati.

In altre parole, dato un segmento orientato, un vettore è l'insieme di tutti i segmenti orientati equivalenti a quello dato. Ciascuno di questi segmenti orientati è detto essere un rappresentante del vettore.

In fisica: segmento orientato $\equiv$ vettore applicato (al 1° estremo del segmento)
classe di equivalenza $\equiv$ vettore

Se $\vec{u} = \overline{AB}$ e $\vec{v} = \overline{CD}$ sono vettori, allora $\vec{u} = \vec{v}$ se e solo se AB e CD sono equivalenti.

Si può anche scrivere $\vec{u} = \overline{AB} = B - A$ quando AB è un rappresentante di $\vec{u}$.

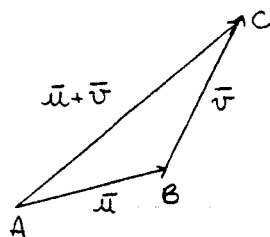
N.B.: Tutti i segmenti orientati del tipo AA , con $A = B$, appartengono a un'unica classe di equivalenza, detta vettore nullo (caso degenere).

In altre parole, $\vec{0} = \overline{AA} = A - A$.

DEF: Si chiamano versori i vettori di modulo uguale a 1.

Somma di vettori

Siamo dati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Scegliamo un punto A qualsiasi e applichiamo su esso $\vec{u} \rightarrow \vec{u} = \overline{AB} = B - A$. Nell' estremo B così ottenuto applichiamo poi $\vec{v} \rightarrow \vec{v} = \overline{BC} = C - B$.

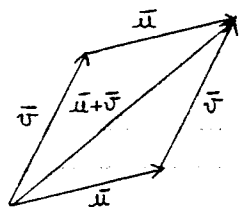


$$\vec{u} + \vec{v} = \overline{AC}, \text{ ucc } \overline{AC} = (B - A) + (C - B) = B - A + C - B = C - A$$

OSSERVAZIONE: L'arbitrarietà della scelta di A non influisce sul risultato: ripetendo il procedimento a partire da un altro punto, diciamo A_1 , si ottiene il segmento orientato $A_1 C_1$ che è equivalente ad AC .

PROPRIETÀ DELLA SOMMA DI VETTORI:

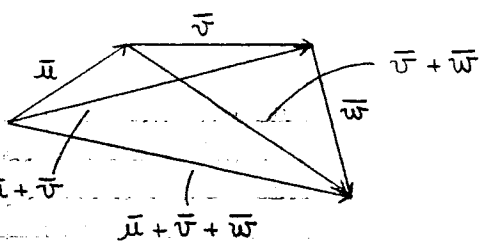
1) Proprietà commutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$



2) Proprietà associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Non ha importanza l'ordine con cui sommo.

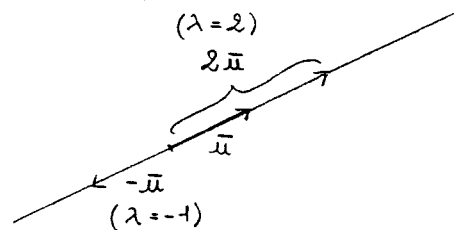
Cio' significa che $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_n$ è ben definito.



3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ ($\vec{0}$ = elemento nullo)

Moltiplicazione scalare x vettore o multiplo di un vettore

$\vec{u}$ vettore, $\lambda \in \mathbb{R}$



Dati il vettore $\vec{u}$ e il n° $\lambda \in \mathbb{R}$, il vettore $\lambda \vec{u}$ è definito come segue:

- Se $\vec{u} = \vec{0}$ oppure $\lambda = 0$, allora $\lambda \vec{u} = \vec{0}$.
- Altrimenti, cioè se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\lambda \neq 0$, il vettore $\lambda \vec{u}$ ha:
 - direzione uguale alla direzione di $\vec{u}$;
 - verso uguale al verso di $\vec{u}$ se $\lambda > 0$, opposto al verso di $\vec{u}$ se $\lambda < 0$;
 - modulo uguale a $|\lambda| \cdot |\vec{u}|$.

Dati due vettori paralleli $\vec{u}$ e $\vec{v}$, con $\vec{u} \neq \vec{0}$, si ha che $\vec{v}$ è multiplo di $\vec{u}$ secondo un ben determinato valore $\lambda \in \mathbb{R}$ dato da:

$$\lambda = \pm \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$$

Si deve scegliere il segno + oppure - a seconda che i due vettori abbiano versi uguali oppure opposti. Perciò, con tale valore di λ , sussiste l'uguaglianza:

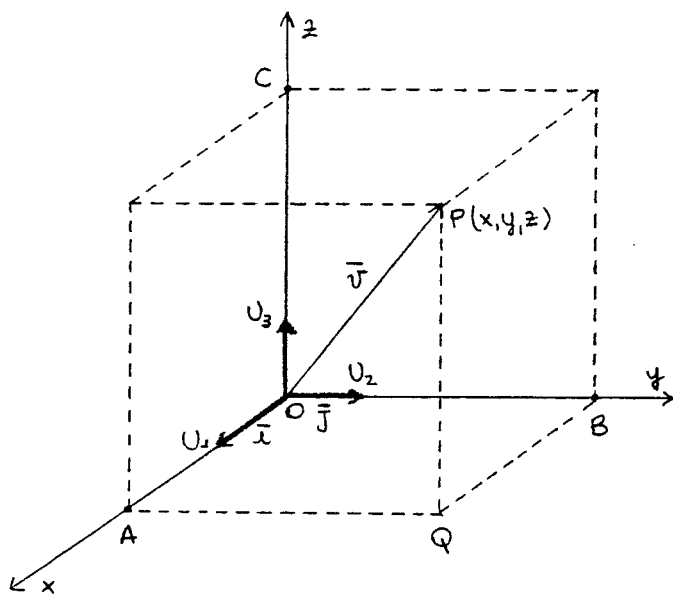
$$\vec{v} = \lambda \vec{u}$$

Notare che $\vec{u} - \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{u} + \underbrace{(-1)\vec{v}}_{\vec{\lambda}}$

PROPRIETÀ: per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e per ogni $\vec{u}, \vec{v}$ vettori

- $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$
- $(\lambda + \mu) \vec{u} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{u}$

Coordinate cartesiane di un vettore



Nel sistema (O, x, y, z) consideriamo i punti unitari degli assi coordinati, cioè $U_1(1, 0, 0)$, $U_2(0, 1, 0)$ e $U_3(0, 0, 1)$. I segmenti orientati OU_1 , OU_2 e OU_3 indicano i tre versori canonici (cioè naturali) $\vec{i} = U_1 - O$, $\vec{j} = U_2 - O$ e $\vec{k} = U_3 - O$, cioè i vettori di modulo 1 che hanno la direzione e il verso degli assi coordinati. Applichiamo su certo vettore $\vec{v}$ in $O \Rightarrow$ otteniamo il seguente orientato di origine O ed estremo $P(x, y, z)$. I vettori $A-O$, $B-O$, $C-O$ sono multipli dei versori $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ rispettivamente secondo i coefficienti x , y e z :

$$\vec{OA} = x\vec{i}; \quad \vec{OB} = y\vec{j}; \quad \vec{OC} = z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Perciò possiamo scrivere:

$$\vec{v} = (x, y, z) = P - O$$

x, y, z sono le coordinate cartesiane di $\vec{v}$, e coincidono con le coordinate di P .

Vi è, dunque, una corrispondenza biunivoca tra i vettori dello spazio e $\mathbb{R}^3$, cioè tra i vettori dello spazio e le triple ordinate di numeri reali:

$$\vec{v} \leftrightarrow (x, y, z) \text{ tale che } \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Si osservi che se $\vec{v} = \vec{AB} = B - A$ con $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$, allora le coordinate di $\vec{v}$ sono esattamente $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

CONSEGUENZE:

Se $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, allora:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = (\text{applico le pr. commut. e assoc.})$$

$$= (x_1\vec{i} + x_2\vec{i}) + (y_1\vec{j} + y_2\vec{j}) + (z_1\vec{k} + z_2\vec{k}) =$$

$$= (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$$

$$\text{Cioè } \vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$\vec{v} - \vec{u} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

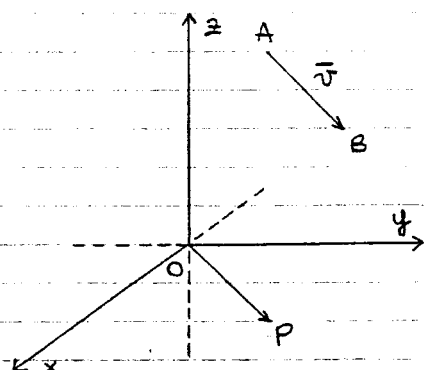
$$\text{Cioè } \vec{v} - \vec{u} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\text{Se } \vec{u} = (x, y, z) \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ allora } \lambda\vec{u} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

ESERCIZIO

Siano $A = (2, -1, 0)$ e $B = (3, 1, -2)$ punti dello spazio.

Si calcolino le coordinate e il modulo del vettore $\vec{v} = \vec{AB}$.



$$\vec{v} = \vec{AB} = B - A = \vec{OP}$$

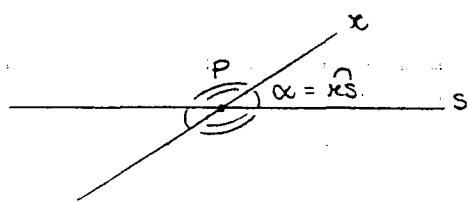
Il punto P ha per coordinate $(3 - 2, 1 - (-1), -2 - 0)$, cioè $(1, 2, -2)$.

$$\text{Pertanto } \vec{v} = (1, 2, -2)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

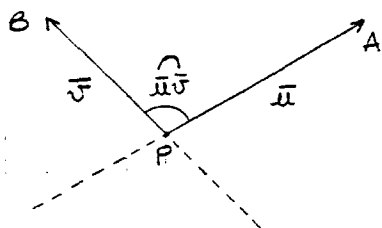
N.B.: Due vettori non nulli $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ sono paralleli quando, per un opportuno λ reale, si ha che $(x_2, y_2, z_2) = \lambda(x_1, y_1, z_1)$.

Angolo tra rette e angolo tra vettori



Siano x e s rette dello spazio incidenti in P . L'angolo tra x e s è $\alpha = \widehat{xs}$, cioè il minore dei due angoli supplementari.

N.B.: $0 \leq \alpha \leq \pi/2$



Dati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, il loro angolo $\widehat{uv}$ è così definito: scegli due rappresentanti con medesima origine P (PA e PB), $\widehat{uv}$ è il minore angolo di cui due rotare PA per diventare parallelo ed equivero a PB , ovvero è l'angolo minore che porta a sovrapporre PA a PB (o PB a PA) conservando l'orientazione.

N.B.: $0 \leq \widehat{uv} \leq \pi$

Prodotto scalare di due vettori

Abbiamo già definito le operazioni:

- Somma di vettori:

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$$

- Moltiplicazione scalare x vettore:

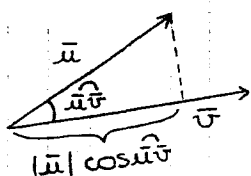
$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\lambda, \vec{u}) \mapsto \lambda \vec{u}$$

Definiamo ora il prodotto scalare:

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$$



Indichiamo con il simbolo $\vec{u} \cdot \vec{v}$ un $n^\circ \in \mathbb{R}$ che si chiama prodotto scalare e che si definisce come segue:

• Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, allora $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \widehat{uv}}$

• Se $\vec{u} = \vec{0}$ oppure $\vec{v} = \vec{0}$, allora $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

OSSERVAZIONE: Il fattore $\cos \hat{u}\hat{v}$ determina il segno di $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Perchè, se entrambi i vettori sono non nulli, possiamo distinguere se l'angolo è acuto, retto, oppure ottuso:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \quad \text{se} \quad 0 \leq \hat{u}\hat{v} < \pi/2 \quad (\text{angolo acuto})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \quad \text{se} \quad \pi/2 < \hat{u}\hat{v} \leq \pi \quad (\text{angolo ottuso})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{se} \quad \hat{u}\hat{v} = \pi/2 \quad (\text{angolo retto})$$

PROPRIETA' DEL PRODOTTO SCALARE:

1) Proprietà commutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, infatti $\hat{u}\hat{v} = \hat{v}\hat{u} \Rightarrow \cos \hat{u}\hat{v} = \cos \hat{v}\hat{u}$.

2) Il prodotto scalare di due vettori è il coseno dell'angolo da essi formato. Infatti, se $|\vec{u}|=1$ e $|\vec{v}|=1$, allora $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \hat{u}\hat{v} = \cos \hat{u}\hat{v}$.

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1; \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1; \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0; \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0; \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$$

3) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, il quadrato di $\vec{u}$ (usando il prodotto scalare di $\vec{u}$ per se stesso) è sempre non nullo:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| |\vec{u}| \cos \hat{u}\hat{u} = |\vec{u}|^2 \cos 0 = |\vec{u}|^2$$

5) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

$$\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v}$$

PROP: Se $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, allora $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$

Dim: $\vec{u} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$

$$\vec{v} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) =$$

$$= x_1 x_2 \vec{i} \cdot \vec{i} + x_1 y_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + x_1 z_2 \vec{i} \cdot \vec{k} + y_1 x_2 \vec{j} \cdot \vec{i} + y_1 y_2 \vec{j} \cdot \vec{j} +$$

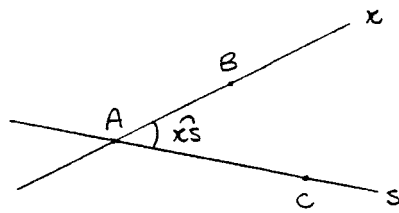
$$+ y_1 z_2 \vec{j} \cdot \vec{k} + z_1 x_2 \vec{k} \cdot \vec{i} + z_1 y_2 \vec{k} \cdot \vec{j} + z_1 z_2 \vec{k} \cdot \vec{k} =$$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

In particolare si ha che $\vec{u} \cdot \vec{u} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$

ESERCIZIO

Siano $A = (-1, 0, 1)$, $B = (-1, 1, -1)$, $C = (1, 2, 0)$ punti di $\mathbb{R}^3$.
Sia x la retta passante per AB e s la retta passante per AC .
Calcolare l'angolo tra x e s .



Osserviamo che se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, allora:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \widehat{u\vec{v}} \Rightarrow \cos \widehat{u\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \Rightarrow \text{angolo } \widehat{u\vec{v}} \text{ e, quindi, } x_s.$$

$$\vec{u} = B - A = (0, 1, -2)$$

$$\vec{v} = C - A = (0, 2, -1)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 + 1 \cdot 2 + (-2)(-1) = 0 + 2 + 2 = 4$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\cos \widehat{u\vec{v}} = \frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{5} > 0 \Rightarrow \text{angolo acuto} \Rightarrow \widehat{u\vec{v}} \text{ coincide con } x_s \text{ (se l'angolo fosse stato diverso avrei dovuto prendere il supplementare)}$$

$$x_s = \arccos \frac{4}{5}$$

Determinante di una matrice quadrata

DEF: Una matrice a m righe e n colonne (matrice $m \times n$) è una tabella:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

NOTAZIONE:

$M_{i,j}$ denota la sotto-matrice di M ottenuta cancellando la i -esima riga e la j -esima colonna.

dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

L'indice di ogni elemento è costituito da due cifre: la 1ª individua la riga, la 2ª la colonna. Righe e colonne si dicono linee.

Una matrice si dice quadrata (di ordine m) se $m = n$, cioè se ha un ugual n° di righe e di colonne.

DEF: Si dice che un elemento a_{ij} è di classe pari oppure di classe dispari a seconda che la somma degli indici $i+j$ sia pari oppure dispari.

DEF: A ogni matrice quadrata resta associato un n° reale, detto determinante ($M \mapsto \det M \in \mathbb{R}$) così definito:

1) Se $m=1$, cioè $M=(a)$, allora $\det M = a$

2) Se $m>1$, allora $\det M = \sum_{j=1}^m (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1,j})$

"sviluppo secondo la 1ª riga"

Se $m=1$, $\det M = a_{11}$

Se $m=2$, la matrice ha la seguente forma:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det M = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ad esempio:

$$\text{Sia } M = \begin{pmatrix} -1 & \pi \\ \sqrt{7} & -3 \end{pmatrix} \quad (m=2)$$

$$\text{Allora } \det M = -1(-3) - \pi\sqrt{7} = 3 - \pi\sqrt{7}$$

Se $m>1$ posso calcolare il determinante secondo la 1ª riga:

$$\det M = \sum_{j=1}^m (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1,j})$$

Prendiamo, per esempio, una matrice di ordine 3:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se nella matrice M cancelliamo una riga e una colonna, rimane una matrice di ordine 2. Se, ad es, cancelliamo la 1ª riga e la 2ª colonna, resta:

$$M_{1,2} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Il termine $(-1)^{1+j} \det(M_{1,j})$ è chiamato complemento algebrico.

I fattori $(-1)^{1+j}$ fanno cambiare segno ai determinanti nei posti di classe dispari:

$$\det M = (-1)^{1+1} a_{11} \det(M_{1,1}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(M_{1,2}) + (-1)^{1+3} a_{13} \det(M_{1,3})$$

TEOREMA: Il determinante di M si può calcolare sviluppandolo rispetto a una qualunque riga o colonna: il risultato non cambia.

ESERCIZIO

Calcolare il determinante della matrice:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{3} & -\pi & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(M) &= (-1)^{1+1}(-1)(-\pi) + (-1)^{1+2}3(18+\sqrt{3}) + (-1)^{1+3}2(-\pi) = \\ &= +\pi - 3(18+\sqrt{3}) - 2\pi = -\pi - 54 - 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Posso calcolare il det anche a partire dalla 2ª colonna:

$$\det(M) = (-1)^{1+2}3(18+\sqrt{3}) + 0 + (-1)^{3+2}(-\pi)(1-2) = -54 - 3\sqrt{3} - \pi$$

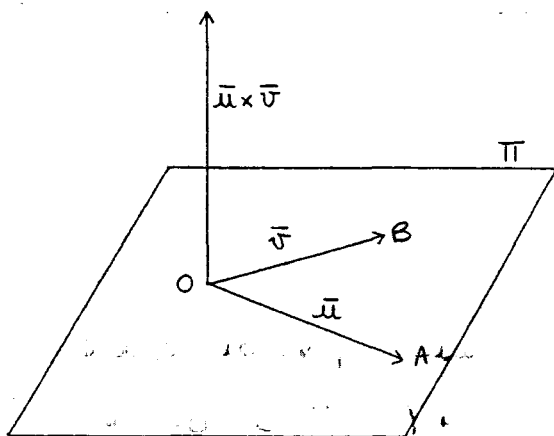
ESERCIZIO

Calcolare il determinante della matrice:

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & -4 & 42 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = 0 + (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 42 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 3\sqrt{7} - 42$$

Prodotto vettoriale di due vettori



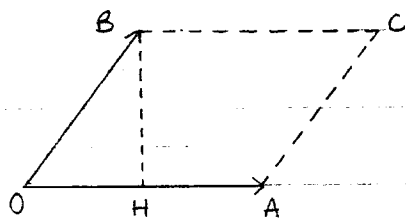
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \vec{u} \times \vec{v} \end{aligned}$$

Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori applicati in uno stesso punto O , con $\vec{u} = A - O$ e $\vec{v} = B - O$. Il prodotto vettoriale $\vec{u} \times \vec{v}$ è un vettore che si definisce come segue:

- Se $\vec{u} = \vec{0}$ oppure $\vec{v} = \vec{0}$ oppure $\vec{u}$ è parallelo a $\vec{v}$, allora $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.
- Altrimenti $\vec{u} \times \vec{v}$ è il vettore che ha:
 - modulo uguale a $|\vec{u}||\vec{v}|\sin \widehat{u,v}$
 - direzione $\perp$ sia a $\vec{u}$ che a $\vec{v}$
 - verso: regola della mano destra

N.B.: Il modulo di $\vec{u} \times \vec{v}$ è $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \widehat{\sin \angle \vec{u} \vec{v}}$ ed è pari all'area del

parallelogramma che ha per lati i rappresentanti dei due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ applicati in uno stesso punto.



$$|\vec{u}| = OA, |\vec{v}| = OB$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = OA \cdot \underbrace{OB \cdot \widehat{\sin \angle AOB}}_{HB} = OA \cdot HB = \text{area del parallelogramma OACB}$$

ALCUNE PROPRIETÀ DEL PRODOTTO VETTORIALE:

1) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ e $\vec{v}$ sono tra loro paralleli.

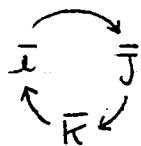
2) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ (il prodotto vettoriale non è commutativo)

3) Proprietà distributiva rispetto alla somma:

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$$

Come si esprime il prodotto vettoriale in termini di coordinate?



$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}; \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}; \quad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}; \quad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

Dati i vettori $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, verifichiamo che $\vec{u} \times \vec{v}$ è il vettore che si ottiene sviluppando il seguente determinante formale:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

Inoltre si ha che:

$$\vec{u} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

$$\vec{v} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \times \vec{v} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = \\
 &= \cancel{x_1 x_2 \vec{i} \times \vec{i}} + x_1 y_2 \vec{i} \times \vec{j} + x_1 z_2 \vec{i} \times \vec{k} + y_1 x_2 \vec{j} \times \vec{i} + \cancel{y_1 y_2 \vec{j} \times \vec{j}} + y_1 z_2 \vec{j} \times \vec{k} + \\
 &+ z_1 x_2 \vec{k} \times \vec{i} + z_1 y_2 \vec{k} \times \vec{j} + \cancel{z_1 z_2 \vec{k} \times \vec{k}} = \\
 &= x_1 y_2 \vec{k} - x_1 z_2 \vec{j} - y_1 x_2 \vec{k} + y_1 z_2 \vec{i} + z_1 x_2 \vec{j} - z_1 y_2 \vec{i} = \\
 &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}
 \end{aligned}$$

È l'unica espressione e' proprio lo sviluppo del determinante.

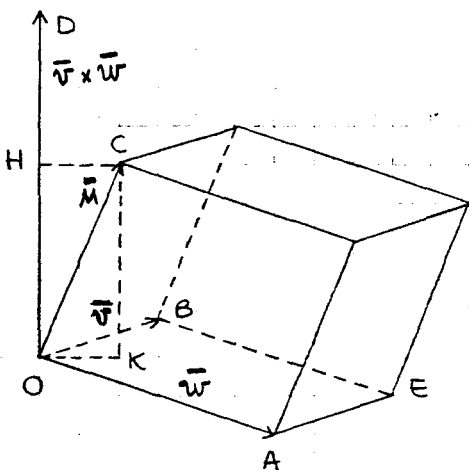
Prodotto misto

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &\mapsto \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \\
 &\quad \quad \quad \parallel \\
 &\quad \quad \quad (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} \\
 &\quad \quad \quad \parallel \\
 &\quad \quad \quad -\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})
 \end{aligned}$$

Dati tre vettori $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, si chiama prodotto misto dei tre vettori il n° $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ ed esso e' pari a:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

N.B.: $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| =$ volume del parallelepipedo individuato da $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.



Consideriamo tre vettori $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e applichiamo l'origine O, ottenendo, con i punti $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$

il parallelepipedo avente per spigoli i seguenti OA, OB, OC ha volume uguale al modulo del seguente determinante:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

Dati: Il parallelogramma $OAEB$, base del parallelepipedo, ha area uguale al
 modulo di $\vec{u} \times \vec{v}$ ($\vec{u} \times \vec{v} = \vec{D} - \vec{O}$):

$$S_{OAEB} = |\vec{D} - \vec{O}| = |\vec{v} \times \vec{w}| = \left| \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \right|$$

L'altezza h_C del parallelepipedo è uguale a OH , che misura:

$$OH = OC |\cos \widehat{COD}| = |\vec{u}| \cdot |\cos(\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w})|$$

Il volume del parallelepipedo vale dunque

$$V = S_{OAEB} \cdot OH = |\vec{u}| |\vec{v} \times \vec{w}| |\cos(\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w})| = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| =$$

$$= |(x_1, y_1, z_1) \cdot \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}| =$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \right|.$$